केन्द्र क्र. 125

NJ-1266

B.Sc. (Part-I) Examination,

Mar.-Apr., 2023

MATHEMATICS

Paper - I

(Algebra and Trigonometry)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं दो भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any two parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई–I / Unit–I

Q. 1. (a) प्रारम्भिक रूपान्तरणों की सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए, जहाँ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

By elementary transformation find A^{-1}, where :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ की पंक्ति जाति एवं स्तम्भ जाति ज्ञात कीजिए एवं सत्यापित कीजिए कि स्तम्भ जाति = पंक्ति जाति।

Find row rank and column rank of the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ and verify that column rank = row rank.

(c) दर्शाइये कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ कैले-हैमिल्टन प्रमेय को संतुष्ट करता है।

Show that the matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{bmatrix}$ satisfies Caley-Hamilton theorem.

इकाई–II / Unit–II

Q. 2. (a) दर्शाइये कि λ का एकमात्र मान जिसके लिए निम्नलिखित समीकरण निकाय शून्येत्तर हल रखते हैं, 6 है :

$$x + 2y + 3z = \lambda x$$
$$3x + y + 2z = \lambda y$$
$$2x + 3y + z = \lambda z$$

Show that the only value of λ for which following system of equations have non-zero solution, is 6 :

$$x + 2y + 3z = \lambda x$$
$$3x + y + 2z = \lambda y$$
$$2x + 3y + z = \lambda z$$

(b) सिद्ध कीजिए कि $x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = 0$ का एक बहुलक मूल है जिसकी बहुकता 2 है। सभी मूलों को भी ज्ञात कीजिए।

Prove that $x^3 + 5x^2 + 3x - 9 = 0$ has a multiple root whose multiplicity is 2. Also find all roots.

(c) समीकरण $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 - 1 = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

Find nature of roots of the equation $f(x) = 2x^4 + 3x^3 - x^2 - 1 = 0$.

इकाई–III / Unit–III

Q. 3. (a) 100 ! के अन्त में कितने शून्य हैं ?

How many zeros are there in the end of 100 ! ?

(b) सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G के दो उपसमूहों H_1 तथा H_2 का सर्वनिष्ठ $H_1 \cap H_2$, G का एक उपसमूह होता है।

Prove that intersection $H_1 \cap H_2$ of two subgroups H_1 and H_2 of a group G is a subgroup of G.

(c) यदि H, G में सूचकांक 2 का एक उपसमूह है, तो सिद्ध कीजिए कि H, G का एक प्रसामान्य उपसमूह है।

If H is a subgroup in G of index 2, then prove that H is a normal subgroup of G.

इकाई–IV / Unit–IV

Q. 4. (a) सिद्ध कीजिए कि समूह समाकारिता $f : G \rightarrow G'$ एक तुल्याकारिता होती है यदि और केवल यदि $\ker f = \{e\}$

Prove that a group homomorphism $f : G \rightarrow G'$ is an isomorphism iff $\ker f = \{e\}$.

(b) सिद्ध कीजिए कि एक रिंग R शून्य भाजक रहित है यदि और केवल यदि R में निरसन नियमों का पालन होता है।

Prove that a ring R is without divisors of zero iff cancellation laws hold in R.

(c) किसी क्षेत्र F में सिद्ध कीजिए कि :

$(ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1} \ \forall \ a, b \in F$ तथा $a \neq 0, b \neq 0$

In any field F prove that :

$(ab)^{-1} = a^{-1} b^{-1} \ \forall \ a, b \in F$ and $a \neq 0, b \neq 0$

इकाई–V / Unit–V

Q. 5. (a) यदि $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$, तो सिद्ध कीजिए कि

$\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$

If $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$, then prove that

$\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$.

(b) सिद्ध कीजिए :

$$\log(1 + i\tan\alpha) = \log_e \sec\alpha + i\alpha$$

Prove that :

$$\log(1 + i\tan\alpha) = \log_e \sec\alpha + i\alpha$$

(c) सिद्ध कीजिए कि :

$$\frac{1}{3.5} + \frac{1}{7.9} + \frac{1}{11.13} + \ldots\ldots \infty \text{ पदों तक} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}$$

Prove that :

$$\frac{1}{3.5}+\frac{1}{7.9}+\frac{1}{11.13}+\ldots\ldots$$

upto ∞ terms $=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\pi}{8}$.